должно получиться также, что

$$md \gtreqless pf.$$

Таким же путем можно доказать предложение 23, исходя из 21:

$$a : b = e : f \text{ и } b : c = d : e$$

влекут за собой

$$a : c = d : f.$$

Из этих предложений следует, что отношение $a : c$ составлено из отношений $a : b$ и $b : c$; но если рассматривать отношение древних, как современное число, то ясно, что отношение, составленное из двух отношений, представляет то же самое, что теперь называют *произведением*. И хотя составляемые отношения должны иметь определенные формы, ибо последующий член одного равняется предыдущему числу другого, но это не является вовсе ограничением для составления отношений. Действительно, из геометрического представления отношений в книге VI, 12 следует, что всякое отношение можно преобразовать таким образом, чтобы один из его обоих членов имел данную величину. В книге VI, 23, где доказывается, что отношение между двумя параллелограмами, имеющими равные углы, составляется из отношений между сторонами их, видно также, что последним придают форму $a : b$ и $b : c$, чтобы можно было их составить.

Теоремы 22 и 23 книги V, взятые вместе с этим заимствованием из книги VI, содержат полные доказательства предложений, которые в современной формулировке гласят следующее: *произведение определяется своими сомножителями, причем порядок последних не играет никакой роли.*

Таким образом древние обладали двумя различными способами представления того, что теперь — независимо от вопроса о рациональности или иррациональности сомножителей — называют их *произведением*: во-первых, только что изложенным нами способом и, во-вторых, представлением с помощью прямоугольников, которым пользовались в геометрической алгебре. Но, по существу, оба эти способа представления выражают одну и ту же вещь, как это видно из вышеприведенной теоремы 23 книги VI.

Хотя представление путем сложных отношений более громоздко, но оно обладает одним существенным преимуществом: в то время как в геометрической алгебре речь идет обыкновенно лишь о произведениях двух сомножителей, изображаемых с помощью прямоугольников, а для изображения произведений трех сомножителей нужно обратиться к пространству и взять для этого параллелепипеды,—с помощью сложного отношения сомножителей можно представить произведение произвольного числа их. Действительно, если придать сомножителям вид:

$$a : b, \quad b : c, \quad c : d, \quad d : e,$$